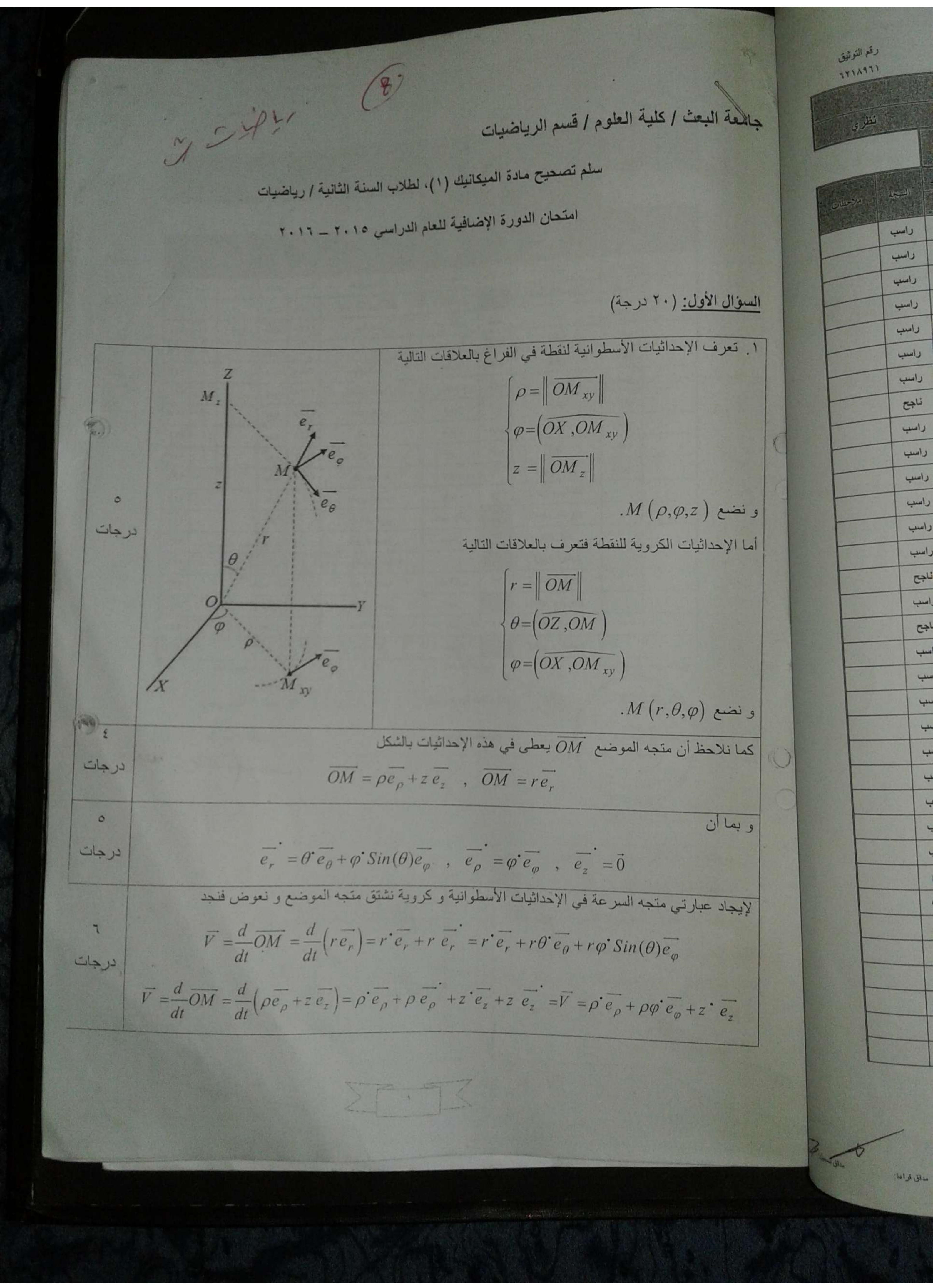


جامعة البعث / كلية العلوم / قسم الرياضيات

سلم تصحيح مادة الميكانيك (١)، لطلاب السنة الثانية / رياضيات

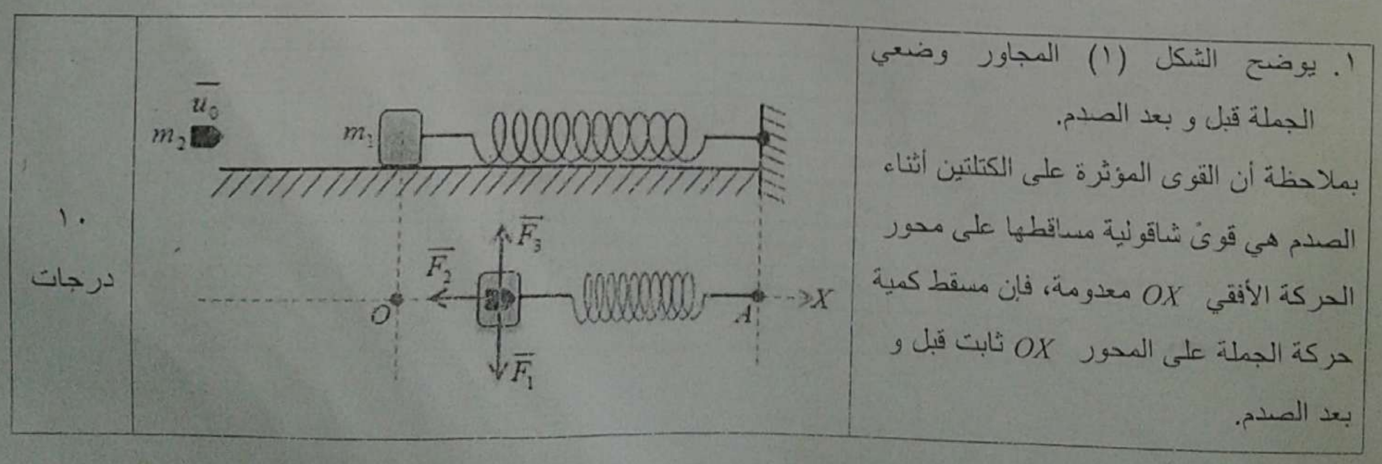
امتحان الدورة الإضافية للعام الدراسي ٢٠١٥ ـ ٢٠١٦

السؤال الأول: (٢٠ درجة)

١. تعرف الإحداثيات الأسطوانية لنقطة في الفراغ بالعلاقات التالية $$\begin{cases}\rho=\left\Vert \overline{OM_{xy}}\right\Vert \\ \varphi=\left(\widehat{\overline{OX},\overline{OM_{xy}}}\right) \\ z=\left\Vert \overline{OM_{z}}\right\Vert\end{cases}$$ و نضع $M(\rho,\varphi,z)$. أما الإحداثيات الكروية للنقطة فتعرف بالعلاقات التالية $$\begin{cases}r=\left\Vert \overline{OM}\right\Vert \\ \theta=\left(\widehat{\overline{OZ},\overline{OM}}\right) \\ \varphi=\left(\widehat{\overline{OX},\overline{OM_{xy}}}\right)\end{cases}$$ و نضع $M(r,\theta,\varphi)$.	٥ درجات
كما نلاحظ أن متجه الموضع $\overline{OM}$ يعطى في هذه الإحداثيات بالشكل $$\overline{OM}=\rho\overline{e_{\rho}}+z\,\overline{e_{z}}\ ,\quad \overline{OM}=r\overline{e_{r}}$$	٤ درجات
و بما أن $$\dot{\overline{e_{r}}}=\dot{\theta}\,\overline{e_{\theta}}+\dot{\varphi}\,Sin(\theta)\overline{e_{\varphi}}\ ,\quad \dot{\overline{e_{\rho}}}=\dot{\varphi}\,\overline{e_{\varphi}}\ ,\quad \dot{\overline{e_{z}}}=\vec{0}$$	٥ درجات
لإيجاد عبارتي متجه السرعة في الإحداثيات الأسطوانية و كروية نشتق متجه الموضع و نعوض فنجد $$\vec{V}=\frac{d}{dt}\overline{OM}=\frac{d}{dt}\left(r\overline{e_{r}}\right)=\dot{r}\,\overline{e_{r}}+r\,\dot{\overline{e_{r}}}=\dot{r}\,\overline{e_{r}}+r\dot{\theta}\,\overline{e_{\theta}}+r\dot{\varphi}\,Sin(\theta)\overline{e_{\varphi}}$$ $$\vec{V}=\frac{d}{dt}\overline{OM}=\frac{d}{dt}\left(\rho\overline{e_{\rho}}+z\,\overline{e_{z}}\right)=\dot{\rho}\,\overline{e_{\rho}}+\rho\,\dot{\overline{e_{\rho}}}+\dot{z}\,\overline{e_{z}}+z\,\dot{\overline{e_{z}}}=\vec{V}=\dot{\rho}\,\overline{e_{\rho}}+\rho\dot{\varphi}\,\overline{e_{\varphi}}+\dot{z}\,\overline{e_{z}}$$	٦ درجات

نلاحظ أن $\vec{r}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\vec{r}_A+\vec{R} \quad\Rightarrow\quad d\vec{r}=d\vec{r}_A+d\vec{R}=\vec{0}+d\vec{R}=d\vec{R}$ و ذلك لأن $\vec{r}_A=\overrightarrow{Const}$.	٣ درجات
و بما أن $\vec{R}^2=R^2$ فإنه و بمفاضلة الطرفين نجد أن $\vec{R}\cdot d\vec{R}=R\ dR$، و يكون $dV=\lambda\frac{1}{R^4}R\ dR=\lambda\frac{dR}{R^3}=d\left(-\frac{\lambda}{2R^2}\right) \quad\Rightarrow\quad V=-\frac{\lambda}{2R^2}+D$ و هو تابع كمون الحقل حيث أن D هو ثابت يتم تعيينه من شروط كمون المسألة.	٥ درجات
و لحساب العمل، نعلم أن $W_{B\to C}=V(B)-V(C)=\left(-\frac{\lambda}{2R_B^2}+D\right)-\left(-\frac{\lambda}{2R_C^2}+D\right)=\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{R_C^2}-\frac{1}{R_B^2}\right)$ $=\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{\lVert\overrightarrow{AC}\rVert^2}-\frac{1}{\lVert\overrightarrow{AB}\rVert^2}\right)$ $=\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{(3-0)^2+(2-0)^2+(1-(-1))^2}-\frac{1}{(1-0)^2+(2-0)^2+(1-(-1))^2}\right)$ $=\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{9+4+4}-\frac{1}{1+4+4}\right)=\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{9}\right)=-\frac{4}{153}\lambda$	٥ درجات

السؤال الثالث: (٣٥ درجة)

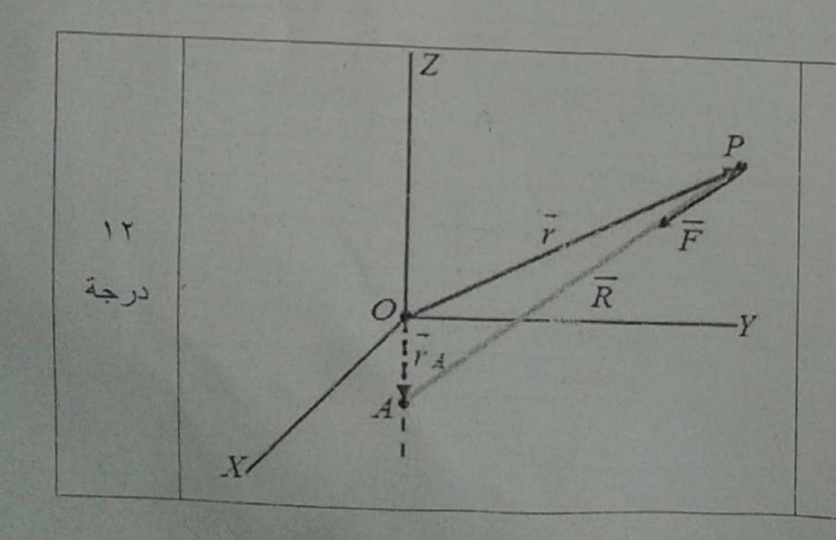


١. يوضح الشكل (١) المجاور وضعي الجملة قبل و بعد الصدم. بملاحظة أن القوى المؤثرة على الكتلتين أثناء الصدم هي قوىً شاقولية مساقطها على محور الحركة الأفقي OX معدومة، فإن مسقط كمية حركة الجملة على المحور OX ثابت قبل و بعد الصدم.		١٠ درجات

السؤال الثاني: (٢٠ درجة)

الحل: نلاحظ أن $$dt=\frac{1}{4}\left(2+2Cos(2\varphi)\right)d\varphi=\frac{\left(1+Cos(2\varphi)\right)}{2}d\varphi=Cos^2(\varphi)d\varphi \Rightarrow \dot{\varphi}=\frac{1}{Cos^2(\varphi)} \Rightarrow$$ $$\rho^2\dot{\varphi}=\left(\alpha\ Cos(\varphi)\right)^2\frac{1}{Cos^2(\varphi)}=\alpha^2=C$$ و بالتالي فإن حركة النقطة المعطاة خاضعة لقانون السطوح.	٩ درجات
و لإيجاد متجها سرعة و تسارع الحركة نستخدم دستورا بينييه الأول و الثاني، حيث نجد أن $$u=\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\alpha\ Cos(\varphi)} \Rightarrow u'_\varphi=\frac{Sin(\varphi)}{\alpha\ Cos^2(\varphi)} \ \&\ u''_\varphi=\frac{1}{\alpha\ Cos(\varphi)}+\frac{2Sin^2(\varphi)}{\alpha\ Cos^3(\varphi)}$$	٥ درجات
و باستخدام دستورا بينييه نجد أن $$\overline{V}=C\left(-\frac{du}{d\varphi}\overline{e_\rho}+u\overline{e_\varphi}\right)=\alpha^2\left[-\frac{Sin(\varphi)}{\alpha\ Cos^2(\varphi)}\overline{e_\rho}+\frac{1}{\alpha\ Cos(\varphi)}\overline{e_\varphi}\right] \Rightarrow$$ $$\overline{V}=\frac{\alpha}{Cos(\varphi)}\left[-Tan(\varphi)\overline{e_\rho}+\overline{e_\varphi}\right] \ \&\ \overline{\Gamma}=-C^2u^2\left(u''_\varphi+u\right)\overline{e_\rho}=-\frac{2\alpha}{Cos^5(\varphi)}\overline{e_\rho}$$	٦ درجات

السؤال الثالث: (٢٥ درجة)

بملاحظة الشكل المجاور، لنضع $\vec{r}=\overline{OP}\ ,\ \overline{R}=\overline{AP}\ ,\ \vec{r}_A=\overline{OA}$ عندئذٍ نجد حسب الفرض أن $$\overline{F}=-\lambda\frac{1}{R^3}\frac{\overline{R}}{R}=-\lambda\frac{\overline{R}}{R^4}$$ حيث أن $R=\left\Vert\overline{R}\right\Vert$.		١٢ درجة

$m_1 \times 0 + m_2\, u_0 = (m_1+m_2)\,v_0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{m_2}{m_1+m_2}u_0 = \frac{1}{5}\times 350 = 70$	٥ درجات
٢. نلاحظة أن القوى المؤثرة على الكتلة M أثناء حركتها بعد الصدم و كما هي مبينة في الشكل (1) هي قوة ثقل الكتلة $\overrightarrow{F_1} = (m_1+m_2)\overrightarrow{g}$ و قوة مرونة (شد) النابض $\overrightarrow{F_2} = -\mu\, x\, \overrightarrow{e_x}$ و قوة رد فعل مستوي الاستناد الأملس $\overrightarrow{F_3}$. و لدراسة الحركة بعد الصدم، نطبق المبدأ الأساسي في التحريك على حركة الكتلة M فنجد أن $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3} = M\,\overrightarrow{\Gamma} \quad \Rightarrow \quad (m_1+m_2)\overrightarrow{g} - \mu\, x\, \overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{F_3} = (m_1+m_2)\overrightarrow{\Gamma}$ و بالإسقاط على محور الحركة OX نجد أن $0-\mu\, x + 0 = (m_1+m_2)\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{\mu}{m_1+m_2}x = 0 \quad \Rightarrow$ $\boxed{\ddot{x}+49\,x=0}$ .... (*) و هي المعادلة التفاضلية لحركة الكتلة M و نلاحظ أنها معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة.	١٥ درجة
لحلها نكتب المعادلة المميزة الموافقة لها و هي $\lambda^2+49=0$ لنجد أن $\lambda_{1,2} = \mp 7\,i$. و بالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية (*) يعطى بالشكل $x = c_1\, Sin(7\,t) + c_2\, Cos(7\,t)$ .... (**) و بتعويض شروط البدء حيث أنه عندما كانت $t=0$ كانت $x=0$ و $\dot{x}=70$، نجد أن $\begin{cases} x = c_1\, Sin(7\,t) + c_2\, Cos(7\,t) \\ \dot{x} = 7\,c_1\, Cos(7\,t) + 7\,c_2\, Sin(7\,t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = c_2 \\ 70 = 7\,c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = 10 \end{cases}$ و بالتعويض في عبارة الحل العام (**) نجد أن قانون حركة الكتلة M يعطى بالشكل $\boxed{x = 10\, Sin(7\,t)}$ و هو القانون الزمني لحركة الكتلة M و يمثل حركة مستقيمة اهتزازية توافقية مركزها مبدأ الإحداثيات $x=0$ و مطالها $x_{Max} = 10$ و صفحتها الابتدائية $\varphi = 0$ و دورها $\frac{2\pi}{7}$.	٥ درجات

مدرس المقرر: الدكتورُ محمد العلي

انتهى السلم (اربع صفحات)